

# Inhalt

<b>1</b>	<b>Mathematik kulturhistorisch begreifen</b>	<b>1</b>
1.1	Mathematik zwischen Anwendung und Spiel	1
1.1.1	Vorbemerkung	1
1.1.2	Das Morley-Dreieck zwischen Anwendung und Spiel	2
1.1.3	Mathematik zwischen „homo faber“ und „homo ludens“	5
1.1.4	Mathematik und das Menschenrecht auf Irrtum	7
1.1.5	Ein Blick in die Anfänge der Geometrie	8
1.1.5.1	Geometrisches Handeln in vorgeschichtlicher Zeit	8
1.1.5.2	Am Beginn geschichtlicher Zeit	10
1.1.5.3	Ein kurzer Blick in andere Kulturen: China, Japan und Neuseeland	12
1.1.6	Einige aktuelle Beispiele	13
1.1.6.1	Raumgeometrie und Raumanschauung	13
1.1.6.2	Inzidenzgeometrie und endliche Geometrie	16
1.1.6.3	Freiformarchitektur und Mathematik	18
1.1.7	Fazit	19
1.2	Mathematik im kulturhistorischen Kontext	20
1.2.1	Fundamentale Ideen und grundlegende Begriffe	20
1.2.1.1	Grundsätzliche Betrachtungen	20
1.2.1.2	Kriterien bezüglich fundamentaler Ideen	22
1.2.1.3	Ein Beispiel: „Mittelwert & Mittelwertbilden“ und Konsequenzen	23
1.2.2	Historische Verankerung	26
1.2.2.1	Verankernde Ideen	26
1.2.2.2	Otto Toeplitz: „genetische Methode“ als didaktisches Konzept	27
1.2.3	Fazit: „historische Verankerung“ statt „genetische Methode“	31
1.3	Mathematik, Begriff und Begriffsbildung	35
1.3.1	Was ist ein „Begriff“? – Versuch einer eingrenzenden Beschreibung	35
1.3.1.1	Erste Fragen und erste Antworten	35
1.3.1.2	„Begriff“ – ein Blick in wohl weniger bekannte Werke	36
1.3.1.3	Was ist ein Begriff? — Gottlob Frege	38
1.3.2	Begriffsbildung als Prozess	40
1.3.2.1	Begriffsbildung in ontogenetischer und in kulturhistorischer Sicht	40
1.3.2.2	Aspektvielfalt von „Begriffsbildung“ im mathematikdidaktischen Kontext	42
1.3.2.3	Phasen der Begriffsbildung	44
1.3.2.4	Das epistemologische Dreieck	47
1.3.3	Fazit: Begriff – Grundbegriff – Grundlegender Begriff	48
<b>2</b>	<b>Grundlagen mathematischer Strukturen</b>	<b>51</b>
2.1	Überblick	51

2.2	Algebra: vom Verfahren zur Struktur — und wieder zurück	51
2.2.1	Elementare algebraische Strukturen in naiver Sicht	51
2.2.2	Die grundlegende Wende in der „Algebra“: vom Verfahren zur Struktur	52
2.2.3	„Algebra“: zur Entstehung der Bezeichnung	53
2.2.4	Cardano und seine Formeln	55
2.2.5	„Gruppen“ – wie es dazu kam	57
2.2.5.1	Gleichungslehre: mit Permutationen von Cardano über Hudde bis zu Abel und Galois	57
2.2.5.2	Felix Klein und die Geometrie: Invarianten bei Bewegungen	66
2.2.5.3	Gauß, Lagrange und die Zahlentheorie: Quadratische Formen	67
2.2.5.4	Gruppen bei Cayley und Weber: die Geburt der modernen Algebra	69
2.3	Logik und Mengen	71
2.3.1	Vorbetrachtung	71
2.3.2	Aussagen und „klassische“ Aussagenlogik	72
2.3.3	Aussagenlogische Junktoren	77
2.3.3.1	Das aussagenlogische NICHT	77
2.3.3.2	Das aussagenlogische UND — die Konjunktion	79
2.3.3.3	Das aussagenlogische ODER — Adjunktion und Disjunktion	80
2.3.3.4	Das aussagenlogische WENN ... DANN — die Subjunktion	81
2.3.3.5	Das aussagenlogische GENAU DANN ... WENN — die Bijunktion	82
2.3.3.6	Gegensätze: „konträr“ versus „kontradiktorisch“	82
2.3.4	Aussagenkalkül und aussagenlogische „Gesetze“	82
2.3.5	Quantoren und Variablenbindung	85
2.3.6	Zur „Ersetzungsregel“ und einer Konsequenz	87
2.3.7	Mengen	88
2.3.7.1	Zur Entstehung der Mengenlehre	88
2.3.7.2	Mengen — grundlegende Notationen und Definitionen	92
2.3.7.3	Extensionalitätsprinzip und Mengeninklusion	94
2.3.7.4	Aussonderungsprinzip und leere Menge	94
2.3.8	Mengenalgebra	96
2.3.8.1	Verknüpfungen von Mengen und Venn-Diagramme	96
2.3.8.2	Potenzmengen	99
2.3.8.3	Mengenalgebra als Struktur	101
2.3.9	Paarmengen und Produktmengen	103
2.3.10	Erste Anmerkungen zur „axiomatischen Mengenlehre“	106
2.3.11	Vage Logik (Fuzzy Logic) — ein kurzer Einblick	107
<b>3</b>	<b>Zu den historischen Wurzeln des Zahlbegriffs</b>	<b>111</b>
3.1	Was ist eine Zahl?	111
3.1.1	Subjektive Theorien zum Zahlbegriff	111
3.1.2	Vertiefende Diskussion	112
3.1.3	Aspekte von Begriffsbildung	114
3.2	Zum Zahlbegriff in vorgeschichtlicher Zeit	115
3.3	Zum Zahlbegriff in der Antike	116
3.3.1	Babylonische Keilschrifttafeln	116
3.3.1.1	Grundsätzliches	116

3.3.1.2	Yale YBC 7289	117
3.3.1.3	Plimpton 322	118
3.3.2	In Kürze: zur Arithmetik der alten Ägypter	121
3.3.3	Hatten Babylonier und Ägypter schon einen „Zahlbegriff“?	122
3.3.4	Pythagoreer: Größenverhältnisse als Proportionen	123
3.3.4.1	Pythagoreer: Mathematik als „freie Wissenschaft“, als „Spiel des Geistes“	123
3.3.4.2	Zum Zahlenverständnis der Pythagoreer — Eins ist keine „Zahl“!	125
3.3.4.3	„Alles ist Zahl“	126
3.3.4.4	Wechselwegnahme und größtes gemeinsames Maß	128
3.3.4.5	Pythagoreische Mittelwerte und babylonischer Approximationsalgorithmus	130
3.3.4.6	Babylonischer Algorithmus und Heron-Verfahren	132
3.3.5	Die Entdeckung der Irrationalität	133
3.3.5.1	Das Pentagramm der Pythagoreer	133
3.3.5.2	Hippasos von Metapont und das Pentagon	134
3.3.5.3	Wechselwegnahme bei Diagonale und Seite im regelmäßigen Fünfeck	136
3.3.5.4	Inkommensurabilität und Konsequenzen für die Verhältnisleichheit	137
3.3.5.5	Irrationalität	140
3.3.5.6	Alternativen zur Entdeckung der Inkommensurabilität?	142
3.3.5.7	Ergänzungen	144
3.3.5.8	Ein kritischer Rückblick	145
3.4	Fazit	146
<b>4</b>	<b>Zur Kulturgeschichte des Funktionsbegriffs</b>	<b>147</b>
4.1	Was ist eine Funktion? – Problematisierung	147
4.2	Zeittafel zur Entwicklung des Funktionsbegriffs	152
4.3	Babylonier und griechische Antike	153
4.3.1	Babylonier: Tabellierung von Funktionen	153
4.3.2	Griechische Antike: kinematisch erzeugte Kurven als Funktionen	153
4.4	Zeitachsenorientierte Darstellungen im Mittelalter	155
4.4.1	Klosterschule: Zodiac – Planetenbahnen im Tierkreis	155
4.4.2	Guido von Arezzo: Notenschrift als zeitachsenorientierte Darstellung	157
4.4.3	Darstellung zeitabhängiger Größen durch Nicole d’Oresme	157
4.5	16. bis 18. Jh.: Tafeln, empirische Tabellen und Graphen	161
4.5.1	1551 Rheticus – erste trigonometrische Tabellen	161
4.5.2	1614 John Napier: erste „Logarithmentafeln“?	162
4.5.3	1662 John Graunt: erste demographische Statistik	164
4.5.4	1669 Christiaan Huygens: „Lebenslinie“ und „Lebenserwartungszeit“	165
4.5.5	1686 Edmund Halley: Luftdruckkurve	165
4.5.6	1741 / 1761 Johann Peter Süßmilch: geistiger Vater der Demographie	166
4.5.7	1762 / 1779 Johann Heinrich Lambert: Langzeittemperaturmessungen	167
4.5.8	1786 William Playfair: Linien-, Balken- und Tortendiagramme	170
4.5.9	1795 / 1797 Louis Ézéciel Pouchet: Nomogramme	171
4.5.10	1796 James Watt & John Southern: Dampfmaschine und Kreisprozess	171
4.5.11	1817 Alexander von Humboldt: erstmals geographische Isothermen	172

4.5.12	1821 Jean Baptiste Joseph Fourier: Häufigkeitsverteilungen	172
4.6	Beginn der expliziten Begriffsentwicklung von „Funktion“	173
4.6.1	Überblick	173
4.6.2	1671 Isaac Newton: Fluxionen und Fluenten	173
4.6.3	1673 / 1694 Gottfried Wilhelm Leibniz: erstmals das Wort „Funktion“	174
4.6.4	1691 / 1694 Jakob I. Bernoulli	175
4.6.5	1706 / 1718 Johann I. Bernoulli: erstmals Definition von „Funktion“	175
4.6.6	1748 Leonhard Euler: erstmals „Funktion“ als grundlegender Begriff	176
4.7	Entwicklung zum modernen mathematischen Funktionsbegriff	177
4.7.1	1822 Jean Baptiste Fourier: erste termfreie Definition von „Funktion“	178
4.7.2	1829 / 1837 Dirichlet: termfreier Funktionsbegriff	179
4.7.3	1875 Du Bois-Reymond: Funktion als Tabelle	181
4.7.4	1887 Richard Dedekind: Abbildung als eindeutige Zuordnung	182
4.7.5	1891 Gottlob Frege: Präzision – <i>Funktion, Argument, Funktionswert</i>	183
4.7.6	Ende 19. Jh. Peirce, Schröder, Peano: erstmals Funktion als Relation	185
4.7.7	1903 – 1910 Russell, Zermelo, Whitehead: Annäherung an „Funktion als Relation“	186
4.7.8	1914 Felix Hausdorff: mengentheoretische Definition von „Funktion“ als „Relation“	186
4.8	„Gesichter“ von Funktionen — die aktuelle große Vielfalt	188
4.8.1	Funktion als Relation – oder?	188
4.8.2	Bilder als Funktionen – Sichtbare Funktionen	191
4.8.3	Hörbare Funktionen	192
4.8.4	Digitalisierung als Diskretisierung durch Abtastung und Quantisierung	194
4.8.5	Scanner als materialisierte Funktion	195
4.8.6	Funktionsplotter, Funktionsplots und Schaubilder von Funktionen	196
4.8.7	Funktion und Funktionsgraph: eine kuriose formale Konsequenz	196
4.9	Fazit	197
<b>5</b>	<b>Strukturierung durch Relationen und Funktionen</b>	<b>201</b>
5.1	Relationen und Funktionen — grundlegende Definitionen	201
5.1.1	Vorbetrachtungen zur Definitionsfindung	201
5.1.2	Binäre und mehrstellige Relationen	202
5.1.3	Funktionen	204
5.1.4	„Mehrstellige Funktionen“ versus „Funktionen mehrerer Veränderlicher“?	213
5.1.5	Binäre Operationen (Verknüpfungen) und mehrstellige Operationen	214
5.1.6	Verkettung von Relationen	216
5.2	Äquivalenzrelationen und Ordnungsrelationen	218
5.2.1	Eigenschaften binärer Relationen: Formalisierung und Visualisierung	218
5.2.2	Quotientenmengen und Zerlegungen	221
5.2.3	Halbordnung, Totalordnung, Striktordnung, Trichotomie, Wohlordnung	225
5.3	Strukturierung und Axiomatik — Grundsätzliches	229
5.3.1	Axiomatische Methode	229
5.3.1.1	Was sind Axiome?	229
5.3.1.2	Was ist Axiomatik?	231

5.3.1.3	Deduktion, Induktion und Abduktion	232
5.3.2	Axiomensysteme	233
5.3.2.1	Anforderungen an ein Axiomensystem	233
5.3.2.2	Widerspruchsfreiheit	233
5.3.2.3	Unabhängigkeit	235
5.3.2.4	Vollständigkeit	236
5.3.3	„Modell“ und „Modellierung“ — (wie) passt das zusammen?	236
5.3.4	Mengenalgebra als Boolesche Algebra	237
5.3.5	Zur Unabhängigkeit eines Axiomensystems am Beispiel von Gruppen	238
5.3.6	Fazit	246
<b>6</b>	<b>Natürliche Zahlen in axiomatischer Sichtweise</b>	<b>247</b>
6.1	Was sind natürliche Zahlen?	247
6.2	Die Nachentdeckung der Dedekind-Peano-Axiome	249
6.3	Abstraktion: Dedekind-Peano-Algebra	254
6.4	Analyse von Dedekind-Peano-Algebren	259
6.4.1	Vollständige Induktion	259
6.4.2	Unabhängigkeit der Dedekind-Peano-Axiome	261
6.4.3	Homomorphismen in Dedekind-Peano-Algebren	262
6.4.4	Der Monomorphiesatz für Dedekind-Peano-Algebren	268
6.4.5	Der Rekursionssatz	270
6.5	Der angeordnete Halbring der natürlichen Zahlen	273
6.6	Endlichkeit und Abzählbarkeit	277
<b>7</b>	<b>Bruch und Bruchentwicklung</b>	<b>283</b>
7.1	Was ist eigentlich ein „Bruch“? — Erste vorsichtige Ansätze	283
7.1.1	Vorgeschichte	283
7.1.2	Paradoxien bei Brüchen — das Chuquetmittel	284
7.1.3	Etymologische Aspekte	286
7.1.4	Erste historische Aspekte	287
7.1.5	Was ist ein Bruch? – (Typische?) Schlaglichter einer Umfrage	287
7.1.6	Wir tasten uns heran — erste algebraische Aspekte	288
7.1.7	Strukturmathematische Präzisierung	291
7.1.8	Brüche und „Aufbau des Zahlensystems“	294
7.1.9	Die Menge der Bruchzahlen	295
7.1.10	Wohldefiniertheit bei Bruchverknüpfungen	298
7.2	Grundvorstellungen bei Brüchen	300
7.2.1	Vorbemerkung	300
7.2.2	Einige Einstiegsbeispiele	301
7.2.3	Bruch als „Teil eines Ganzen“ oder als „Teil mehrerer Ganzer“	302
7.2.4	Quasikardinaler Aspekt bei Brüchen	305
7.2.5	Quasiordinaler Aspekt bei Stammbrüchen	306
7.2.6	Bruch als (Zahlen-)Verhältnis	306

7.2.7	Bruch als Vergleichsinstrument — der „von-Ansatz“	308
7.2.8	Subjektive Erfahrungsbereiche	309
7.2.9	Eine falsche Grundvorstellung zur Bruchaddition?	311
7.3	Vorstellungen und Darstellungen von (Bruch-)Zahlen	313
7.3.1	Gewöhnliche Brüche und Dezimalbrüche	313
7.3.2	Brüche als Namen für Zahlen	314
7.3.3	Konkrete und abstrakte Brüche	315
7.3.4	Bruchzahlen als „Zahlen“?	316
7.4	Bruchrechnung	317
7.4.1	Vorbemerkung	317
7.4.2	Erweitern und Kürzen	318
7.4.3	Größenvergleich von Brüchen	323
7.4.4	Addition von Brüchen	326
7.4.5	Subtraktion von Brüchen	332
7.4.6	Multiplikation von Brüchen	333
7.4.7	Einbettung der Menge der natürlichen Zahlen in die Menge der Bruchzahlen	338
7.4.8	Identifizierung von Bruchschreibweise und Divisionsschreibweise	338
7.4.9	Division von Brüchen	339
7.4.10	Doppelbrüche	345
7.5	Bruchentwicklung	346
7.5.1	Vorbemerkung	346
7.5.2	Stammbruchentwicklungen	347
7.5.3	Kettenbruchentwicklungen	354
7.5.4	Farey-Folgen und Fordkreise	357
<b>8</b>	<b>Struktur der Zahlenbereiche</b>	<b>361</b>
8.1	Ganze Zahlen und rationale Zahlen	361
8.1.1	Unvollständigkeiten des angeordneten Halbrings der natürlichen Zahlen	361
8.1.2	Einbettung — eine Übersicht	362
8.1.3	Konstruktion des Rings der ganzen Zahlen — Skizze	364
8.1.4	Konstruktion des Körpers der rationalen Zahlen — Skizze	369
8.2	Der archimedisch angeordnete, unvollständige Körper der rationalen Zahlen	370
8.2.1	Der angeordnete Ring der ganzen Zahlen	370
8.2.2	Der angeordnete Körper der rationalen Zahlen	373
8.2.3	Dichtheit des angeordneten Körpers der rationalen Zahlen	374
8.2.4	Archimedizität des angeordneten Körpers der rationalen Zahlen	376
8.2.5	Folgenkonvergenz in angeordneten Körpern	381
8.2.6	Unvollständigkeit des angeordneten Körpers der rationalen Zahlen	389
8.3	Konstruktion der reellen Zahlen über Fundamentalfolgen	392
8.3.1	Der Körper der reellen Zahlen	392
8.3.2	Der archimedisch angeordnete Körper der reellen Zahlen	394
8.3.3	Zur Vollständigkeit des Axiomensystems der reellen Zahlen: Übersicht	397
8.3.4	Zur Monomorphie des Axiomensystems der reellen Zahlen	398

8.4	Ergänzungen und Ausblick	399
8.4.1	Axiomatische Kennzeichnung der reellen Zahlen und der Unterstrukturen	399
8.4.2	Äquivalente Fassungen des Vollständigkeitsaxioms der reellen Zahlen	402
8.4.3	Alternative Konstruktionsmöglichkeiten der Menge der reellen Zahlen	406
8.4.4	Reelle Zahlen: „Konstruktion“ versus „axiomatische Kennzeichnung“	407
8.4.5	Abzählbarkeit, Überabzählbarkeit und Transzendenz	408
8.4.6	Komplexe Zahlen und Quaternionen	415
<b>9</b>	<b>Gleichungen und Gleichheit</b>	<b>423</b>
9.1	Vorbemerkungen	423
9.2	Eine erste Bestandsaufnahme zum Gleichungsbegriff	424
9.2.1	Ein kurzer Blick in die Literatur	424
9.2.2	Kommentierung und Konsequenzen	426
9.3	Phänomenologische Aspekte zum Gleichungsbegriff	427
9.3.1	Vorbemerkungen	427
9.3.2	Mathematisch-inhaltliche Aspekte	429
9.3.3	Sprachliche Aspekte	432
9.3.4	Resümee	433
9.4	Gleichheit und Identität	434
9.4.1	Gleichheit und Identität im Alltagssprachlichen Verständnis	434
9.4.2	Gleichheit im Rechtswesen	436
9.4.3	Übereinstimmung bezüglich „aller Merkmale“?	437
9.4.4	Gleichheit – Ununterscheidbarkeit – Identität	439
9.4.5	Gleichheit und Äquivalenz in der Mathematik	441
9.4.6	Ungleichheit und Verschiedenheit	445
9.4.7	Zu einer axiomatischen Fassung des Identitätsbegriffs	447
9.4.8	Ein kritischer Rückblick	450
9.4.9	Tertium comparationis – Drittengleichheit	452
9.5	Ein allgemeiner Gleichungsbegriff	453
9.5.1	Vorbemerkung	453
9.5.2	Zur Definition von „Gleichung“	454
9.5.3	Zur Vorgehensweise im Rückblick	458
9.5.4	Gleichungen in nicht-numerischen Strukturen	460
9.5.5	Ungleichungen	461
9.6	Zum Gleichheitszeichen	462
9.7	Schlussbemerkung	469
<b>10</b>	<b>Zu den Lösungen der Aufgaben</b>	<b>471</b>
	<b>Literatur</b>	<b>509</b>
	<b>Bildquellennachweise</b>	<b>525</b>
	<b>Index</b>	<b>527</b>