

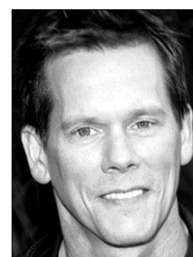
Horst HISCHER

## Kleine Welten und Netzwerke: ihr mögliches „diskretes Potential“ für Didaktik, Unterricht und Pädagogik

Das *Kleine-Welt-Phänomen* wird seit Ende der 1990er Jahre in *Informatik*, *Diskreter Mathematik*, *Mathematischer Optimierung* und *Soziologie* erörtert; es ist typisch für viele große (auch soziale) „Netzwerke“. Gemeinsam mit der Netzwerktheorie hat es Potential für Forschung und Entwicklung in der Mathematikdidaktik und in der Pädagogik, und für den Mathematikunterricht bietet es Möglichkeiten des Experimentierens und Reflektierens.

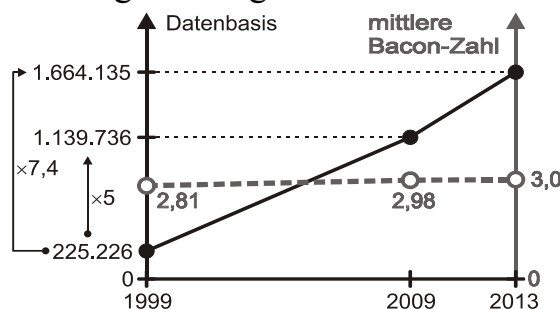
### Das Kevin-Bacon-Orakel

Der bis Ende der 1990er Jahre kaum bekannte Film- und Fernsehschauspieler („Akteur“) Kevin Bacon spielte früher nur Nebenrollen und war 1996 zu internationaler Bekanntheit gelangt, als im *Time Magazine* die Website *The Oracle of Bacon* des Informatikers Brett Tjaden – <http://oracleofbacon.org/> – als eine der „Top Ten“ ausgezeichnet wurde. Ihr liegt als ständig aktualisierte Datenbank die sog. *Internet Movie Data Base* – <http://www.imdb.com/> – zugrunde. Die Eingabe des Namens eines beliebigen registrierten Akteurs liefert eine bestimmte natürliche Zahl (oder  $\infty$ ) als „Abstand“ zu Bacon, genannt *Bacon-Zahl* dieses Akteurs, z. B. „3“ als Bacon-Zahl von Heinrich George. Dazu betrachte man den *Zusammenarbeitsgraphen*, dessen Knoten für die in der Datenbank erfassten Akteure stehen, wobei zwischen zwei Akteuren genau dann eine Kante verläuft, wenn beide in einem Film gemeinsam mitgewirkt haben. Die Bacon-Zahl eines Akteurs  $A$  ist dann die *Länge eines kürzesten Weges* zwischen Bacon und  $A$ , also die graphentheoretische *Entfernung*  $d(A, \text{Bacon})$ . Die Tabelle listet die absoluten Häufigkeiten der Bacon-Zahlen im Stande von 1999 auf, dazu die zugehörige Datenbasis und die *mittlere Bacon-Zahl* von damals knapp 3.



Bacon-Zahl	1999
0	1
1	1.181
2	71.397
3	124.975
4	25.665
5	1.787
6	196
7	22
8	2
mittlere Bacon-Zahl:	2,81
Datenbasis:	225.226

Die graphische Darstellung zeigt die zeitliche Entwicklung der Bacon-Zahlen bis 2013, wobei trotz erheblicher Vergrößerung der Datenbasis die *mittlere Bacon-Zahl* nahezu stabil ist. Weitere Analysen zeigen, dass trotz Zunahme der Datenbasis die *maximale endliche Bacon-Zahl* 8 bleibt und dass auch der *mittlere Knotenabstand* quasi *unabhängig von der Datenbasis* ist.



## Die Erdős-Zahl



Die „Erdős-Zahl“ ist ähnlich wie die Bacon-Zahl definiert, sie bezieht sich auf den bedeutenden ungarischen Mathematiker Pál Erdős. Der (zeitabhängige) *Zusammenarbeitsgraph* aller (weltweit!) sowohl lebenden als auch nicht mehr lebenden, jeweils publiziert habenden Mathematiker(innen) (hier „Autoren“ genannt) sei *Mathematiker-Graph* genannt und hier mit  $C_m$  bezeichnet („collaboration graph“). Zwischen zwei Knoten von  $C_m$  (also diesen Autoren) verläuft in Analogie zum Akteurs-Graphen genau dann eine Kante, wenn sie mindestens eine Publikation *gemeinsam* verfasst haben (wobei auch weitere Autoren beteiligt sein können). Für alle Autoren  $M$  aus  $C_m$  ist dann  $d(M, \text{Erdős})$  deren *Erdős-Zahl*.  $C_m$  basiert auf der „MathSciNet“ genannten Datenbank, die von der *American Mathematical Society* gepflegt wird. Die Erdős-Zahlen aller Autoren aus  $C_m$  sind abrufbar unter [www.ams.org/mathscinet/collaborationDistance.html](http://www.ams.org/mathscinet/collaborationDistance.html) (sie können ebenfalls ggf.  $\infty$  sein). Die Autoren mit endlicher Erdős-Zahl bilden den *Erdős-Graph* genannten Untergraphen von  $C_m$ , der mit  $C_e$  bezeichnet sei. Die Tabelle zeigt die absoluten Häufigkeiten dieser endlichen Erdős-Zahlen. Wie bei der Bacon-Zahl liegt eine (angesichts der großen Datenbasis) *sehr kleine mittlere Erdős-Zahl* vor.

Erdős-Zahl	Häufigkeit 2010
1	504
2	6593
3	33605
4	83642
5	87760
6	40014
7	11591
8	3146
9	819
10	244
11	68
12	23
13	5
mittlere Erdős-Zahl:	4,65
Datenbasis:	268.015

## Das Kleine-Welt-Phänomen

Beide Tabellen liefern auch den jeweils maximal möglichen Knotenabstand: Im Erdős-Graphen existiert zwischen Autoren  $A$  und  $B$  stets ein Weg über Erdős, und weil die Erdős-Zahl maximal 13 ist, folgt  $d(A, B) \leq 26$ . Analog ist im Akteurs-Graphen  $d(A, B) \leq 16$ , wobei tatsächlich  $d(A, B) \leq 15$  gilt. Der *maximale Knotenabstand* eines Graphen ist sein *Durchmesser*, der also in beiden Fällen im Vergleich zur jeweils großen Datenbasis *sehr klein* ist. Damit ist auch der *mittlere Knotenabstand* jeweils „*relativ klein*“, nämlich kleiner als der jeweils maximale Knotenabstand. Das bedeutet per saldo eine „*schnelle Durchsuchbarkeit*“ beider Graphen, was zu folgender Erfahrung passt: Stößt man als Fremder zu einer Versammlung und stellt nach kurzer Unterhaltung fest, dass man mit einem anderen Teilnehmer einen gemeinsamen Bekannten hat, so kommentiert man das etwa mit „*Ach, wie ist die Welt doch klein!*“. In diesem Sinne sind beide Graphen *Beispiele für Kleine Welten*. Für viele große, gewachsene Netzwerke gilt ferner empirisch das sog. „*Potenzgesetz*“: Ist  $k$  der Grad eines Knotens und  $p(k)$  die relative Häufigkeit der Anzahl der Knoten mit dem Grad  $k$ , so gilt  $p(k) \sim k^{-\gamma}$  ( $\gamma = \text{const.}$ ) für große  $k$ , z. B. ist  $\gamma_{\text{Bacon}} \approx 2,3$  und  $\gamma_{\text{Erdős}} \approx 2,97$ .

## Netzgraph, Netzwerk, Vernetzung

Ein *Netz* enthält im alltagssprachlichen Verständnis *Maschen*, und es besteht aus *Knoten* und den sie verbindenden *Kanten*. Ein *zusammenhängender* Graph, bei dem jede Kante Teil einer Masche ist und jeder Knoten mindestens den Grad 3 hat, ist *ideal vernetzt* – er sei *Netzgraph* genannt. Ein zusammenhängender, maschenhaltiger Graph ist ein *Netzwerk*. (In der Netzwerktheorie sind „Graph“ und „Netzwerk“ meist Synonyme.) Eine *ideale Vernetzung* würde bedeuten, dass es zu jedem Eingang mindestens zwei Ausgänge gibt, oder anders, dass es *stets verschiedene Wege zu einem Ziel* gibt (als Kennzeichen für einen *offenen Unterricht* deutbar). Dazu gibt es graduelle Abstufungen der Vernetzung, messbar durch *Vernetzungsgradmaße*. Speziell *Bäume* sind *nicht vernetzt*, sondern nur *verzweigt*.

## Netzwerkmodellierung

Ab 1959 diskutierten *Erdős und Rényi* ein stochastisches Modell, das aber das später entdeckte *Kleine-Welt-Phänomen* nicht erklären konnte. 1998 stellten *Watts und Strogatz* ein Modell vor, bei dem vorhandene Kanten eines regulären Graphen stochastisch „neu verdrahtet“ wurden. Damit war zwar das Entstehen Kleiner Welten modellierbar und erklärbar, nicht aber das Potenzgesetz. Beides war erstmalig mit dem 1999 von *Barabási und Albert* präsentierten Modell möglich, das auf der Entstehung von neuen Knoten *und* neuen Kanten durch *bevorzugtes Andocken* beruhte (*Matthäus-Effekt* oder “rich get richer”). Zugleich konnte dieses Modell das Entstehen von *Naben* (wenigen Knoten mit extrem hohem Knotengrad) erklären. Naben sind für das *Ausfallverhalten* von Netzwerken verantwortlich: *Stabilität* bezüglich des Ausfalls zufällig ausgewählter Knoten (Fehlerverhalten) und *Instabilität* beim Ausfall gezielt angegriffener Knoten (Angriffsverhalten).

## Kleine Welten als „diskretes Potential“ für die Mathematikdidaktik?

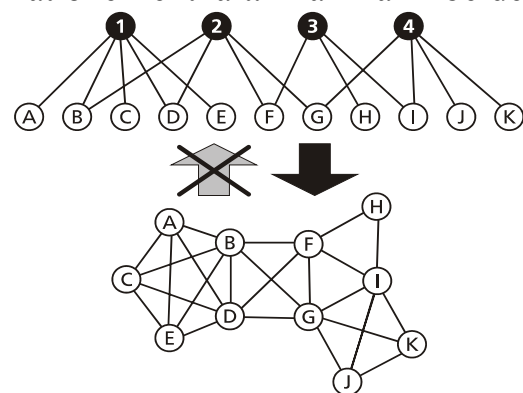
Zunächst ist an Netzwerke zu denken, die der Strukturierung von *Unterrichtsinhalten* dienen. *Knoten* sind z. B. *Themen, Ideen, Begriffe, Definitionen, Vermutungen ...*, aber auch *Beispiele* unter Einschluss von *Übungsaufgaben*. *Kanten* sind Beziehungen zwischen diesen Knoten: *logische* im Sinne des Schließens und des Folgerns bzw. des Folgens, aber auch *emotionale* des Entdeckens, Erlebens, Irrrens, Ratlosseins ..., die insgesamt zu einer individuellen lernpsychologischen „Verankerung“ der Knoten beitragen (können). Diese Kanten können sowohl *gerichtet* als auch *ungerichtet* sein. Hier sind nun die für Kleine Welten typischen *Naben* bedeutsam: Sie ermöglichen *kurze Wege* zwischen den Knoten, und ihr *Ausfallverhalten* ist wichtig: (Wie) entstehen sie von alleine, wie kann man ihre Entstehung und Stabilisierung fördern, wie Wichtiges gegenüber Unwichtigem betonen?

## Kleine Welten als „diskretes Potential“ für den Mathematikunterricht?

Exemplarisch seien einige Anregungen skizziert: (1) „Renaissance“ der Thematisierung endlicher Graphen im Unterricht durch Experimentieren mit „kleinen“ endlichen Graphen. (2) Kleine-Welt-Phänomen: Aneignung empirischen Wissens durch Experimentieren im WWW mit „großen“ endlichen Graphen (Bacon, Erdős). (3) Statistische Auswertung entsprechender Datenbanken: Mittelwerte, zeitliche Entwicklungen, Potenzgesetz, ... (4) Eigenschaften großer „Netzwerke“: Naben, Ausfallverhalten. (5) Netzwerkstatistiken: mittlerer Knotenabstand, mittlerer Knotengrad, ... (6) Transfer dieses empirischen Wissens auf andere große „Netzwerke“. (7) ...

## Kleine Welten als „diskretes Potential“ für die Pädagogik?

Ein *Netz im pädagogisch-didaktischen Kontext* besteht aus zumindest drei Komponenten: *Bestandteile*, *Benutzer* und *Betrachter*. Es ist dem in der Soziologie diskutierten *System* vergleichbar. Die **Bestandteile** sind die schon angesprochenen *Unterrichtsinhalte*, nämlich *thematische Elemente* und *Beziehungen*, beschreibbar durch einen Graphen mit *Knoten* (Themen, Ideen, Begriffe, Definitionen, ...) und *Kanten* (logische und emotionale Beziehungen). **Benutzer** sind insbesondere die *Schülerinnen und Schüler*, deren Beziehungen untereinander ebenfalls durch einen Graphen beschreibbar sind, und **Betrachter** sind insbesondere die *Lehrpersonen*, deren Beziehungen auch durch einen Graphen beschreibbar sind. Weitere „Vernetzungen“ sind denkbar durch diverse Relationen: innerhalb der Benutzer und der Betrachter, ferner durch „Quer“-Beziehungen zwischen ihnen und den Bestandteilen, z. B. als **soziale Netzwerke**, die als *bipartite Graphen* (oberer Teil der Abbildung unten) beschreibbar sind und in der Soziologie untersucht werden: Wenn oben die Ziffern für Filme und die Buchstaben für Akteure stehen, dann liegt ein Akteurs-Graph vor und darunter dessen *unipartite Projektion*, die weniger Informationen enthält. Man kann beide auch als Darstellungen des Erdős-Graphen ansehen oder sich Schülerinnen und Schüler mit ihren Interessen usw. vorstellen: Bipartite Graphen können somit ein Werkzeug zur Beschreibung und Analyse vielfältiger sozialer Strukturen des Unterrichtsgeschehens bilden.



## Literatur

Hischer, Horst [2014]: *Kleine Welten und Netzwerke und ihr mögliches Potential für Didaktik, Unterricht und Pädagogik*. Erscheint in einem Tagungsband. Vorab als Preprint verfügbar: <http://www.math.uni-sb.de/service/preprints/preprint342.pdf>