Horst HISCHER, Saarbrücken und Braunschweig

Vernetzungen im pädagogisch-didaktischen Kontext — vertiefende Aspekte

In [Hischer 2009] wird ein verbales Axiomensystem für *Netz* im pädagogisch-didaktischen Kontext skizziert, das ein Zusammenspiel zwischen den *Bestandteilen*, den *Benutzern* und den *Betrachtern* eines solchen Netzes beschreibt. Anlass für diese Betrachtungen ist die Feststellung, dass in erziehungswissenschaftlichen Zusammenhängen (wie auch im Alltag) oft von „Vernetzungen" gesprochen wird, ohne zu präzisieren, was denn darunter zu verstehen sei. Im Folgenden werden Weiterungen wie *Netzgraph* und *Vernetzungsgrad* kurz angesprochen, die schließlich zu einer zweckmäßigen Interpretation von *„Vernetzung"* im pädagogisch-didaktischen Kontext führen. Eine umfassende Untersuchung findet sich in [Hischer 2010].

1. Der konzeptuelle Ansatz

Die oben erwähnten Netze sind in ihrer Zusammensetzung aus Bestandteilen, Benutzern und Betrachtern und den damit einhergehenden vielfältigen Verbindungen und Beziehungen sehr komplexe Gebilde, die nicht einfach nur als Graphen (mit besonderen Eigenschaften) aufgefasst werden können, sondern eher Assoziationen an die insbesondere in der Soziologie betrachteten sog. „Systeme" wecken.

Dennoch bieten sich („einfache") Graphen zur strukturellen Beschreibung der so genannten *Bestandteile von Netzen* (nämlich den „Knoten" und ihren „Verbindungen", genannt „Kanten") an, indem verschiedene Graphen überlagert werden und man damit dann *ohne Mehrfachkanten* auskommen kann. Die (ebenfalls vielfältig denkbaren) Beziehungen der *Benutzer* zu den Knoten der Bestandteile (oder auch zu deren Verbindungen) und der Benutzer untereinander lassen sich ggf. durch weitere Graphen beschreiben. Hinzu kommen noch Beziehungen der *Betrachter* untereinander, zu den Benutzern und zu den Bestandteilen, so dass diverse Graphen vorliegen können, die insgesamt in ihrer Überlagerung ein *Netz im pädagogisch-didaktischen Kontext* ausmachen. Es bietet sich daher an, zunächst spezielle Graphen für das *graphentheoretisch „Innerste" der Netze* zu charakterisieren – nämlich für ihre *Bestandteile*. Diese Graphen werden dann idealtypisch „Netzgraphen" genannt, verallgemeinert heißen sie „Netzwerke".

2. Netzgraphen

Typisch für „Netze" im Alltagsverständnis ist u. a. das Vorhandensein von *Maschen,* in denen sich die „Benutzer" verfangen können, die aber auch deren Schutz dienen können. „Bäume" sind damit stets nicht „vernetzt".

Eine graphentheoretische Analyse führt zu der Idee, einen „Netzgraphen“ als endlichen, zusammenhängenden, „maschenhaltigen“ Graphen aufzufassen (noch schärfer: wenn sogar jede Kante „Teil einer Masche“ ist), ergänzt durch die sinnvolle Zusatzforderung, dass jeder Knoten mindestens den Grad 3 hat. Das führt dann äquivalent damit zu der Definition: Ein endlicher Graph ist genau dann ein **Netzgraph**, wenn **zwischen je zwei Knoten mindestens zwei verschiedene Wege** existieren und wenn jeder Knoten mindestens den Grad 3 hat. Es liegt nahe, die Existenz je verschiedener Wege als die wesentliche Eigenschaft für „Vernetzung“ anzusehen.

Vollständige Graphen mit mindestens vier Knoten sind dann stets Netzgraphen. Entfernt man einzelne Kanten sukzessive, so können zwar zunächst noch Netzgraphen vorliegen, jedoch „kippt“ die Lage plötzlich, so dass dann kein Netzgraph mehr vorliegt, obwohl dieser Graph „noch“ kein Baum ist, weil noch mindestens eine Masche existiert (oder er nicht mehr zusammenhängend ist). So wird man ggf. auch derartige Graphen noch als „vernetzt“ ansehen, allerdings mit folgender Konsequenz: Das (idealtypische) *„Vorliegen eines Netzgraphen“* und das *„Vorliegen einer Vernetzung“* bedeuten nicht dasselbe. Das o. g. „graphentheoretisch Innerste eines Netzes“ kann also im Idealfall ein Netzgraph sein, soll aber, um stets ansprechbar zu sein, im allgemeinen Fall „**Netzwerk**“ genannt werden. Ein „Netzwerk“ ist also der aus den Bestandteilen eines Netzes (s. o.) gebildete Graph, der ggf. ein Netzgraph ist, der aber dennoch eine „Vernetzung“ zum Ausdruck bringen kann, die in geeigneter Weise zu messen ist.

3. Vernetzungsgradmaße

Daher liegt es nahe, neben dem „Vorliegen eines Netzgraphen“ als einem *qualitativen Maß* für die Vernetzung auch ein *quantitatives Maß* für die Vernetzung einzuführen, genannt „Vernetzungsgrad“.

Die „reine“ mathematische Graphentheorie hat zwar umfassend sog. „Bäume“ untersucht, ihr Augenmerk gilt aber bisher weder Netzgraphen im hier vorgestellten Verständnis noch Vernetzungsgradmaßen in einem für die Anwendung nützlichen Sinn. Anders ist es jedoch in den Anwendungsdisziplinen (insbesondere in Physik und in Soziologie, zunehmend aber auch in Angewandter Mathematik und in Informatik, nicht jedoch bisher in Didaktik und in Pädagogik): Hier hat sich in den letzten 15 Jahren geradezu explosionsartig eine neue transdisziplinäre Forschungsrichtung entwickelt, genannt „Netzwerkanalyse“ (“network analysis”). Dort werden zwar keine idealtypischen „Netzgraphen“ untersucht, wohl aber die Struktur „natürlich entstehender Netzwerke“, und in dem Zusammenhang wurden auch unterschiedliche Vernetzungsgradmaße vorgeschlagen und für die Untersuchung solcher Netzwerke herangezogen. Hier sind vor allem zu nennen:

- **mittlerer Knotenabstand** („charakteristische Weglänge“ *L* des Graphen)
- **Clusterbildung** („Clusterkoeffizient“ *C* des Graphen)
- **mittlerer Knotengrad** (ähnlich zur „Dichte“ des Graphen)
- **Durchmesser** des Graphen

Diesen globalen Vernetzungsgradmaßen liegen lokale zugrunde. Sie werden in [Hischer 2010] genauer betrachtet und seien hier nur skizziert: Der *Knotenabstand* ist die Länge eines kürzesten Weges zwischen zwei Knoten (als Anzahl der Kanten eines solchen Weges), woraus sich die o. g. *charakteristische Weglänge L* als deren arithmetisches Mittel ergibt. Alle unmittelbaren Nachbarn eines Knoten bilden dessen Nachbarschaft als „Cluster“. Ein Cluster heißt „Clique“, falls jeder seiner Knoten mit jedem anderen verbunden ist. Der lokale Clusterkoeffizient misst dann die *Cliquenhaftigkeit* des Clusters (als Verhältnis der Anzahl aller vorhandenen zu allen möglichen Kanten innerhalb dieses Clusters); das arithmetische Mittel aller lokalen Clusterkoeffizienten ist der globale *Clusterkoeffizient C*, er ist maximal 1, und z. B. bei Bäumen und Wäldern ist er 0. Der *mittlere Knotengrad* ist das arithmetische Mittel der einzelnen Knotengrade; dividiert man ihn durch die Anzahl aller für jeden Knoten verfügbaren „Partner“, so erhält man die *Dichte*. Der *Durchmesser* ist der „größte auftretende Abstand“ in einem Graphen (wie beim Durchmesserbegriff der Geometrie). All diese Vernetzungsgradmaße messen unterschiedliche Eigenschaften und können in ihrer Gesamtheit zur Vernetzungsbeurteilung herangezogen werden.

4. Modellierung, Stabilität und Angreifbarkeit realer Netzwerke

„Natürliche“ Netzwerke entstehen nicht aufgrund eines geordneten Plans, sondern unter stochastischen Bedingungen. Die ersten Untersuchungen von „Zufallsgraphen“ waren rein graphentheoretischer Natur und gehen auf Erdős und Rényi zurück (1959: “On Random Graphs”): *n* vorhandene Knoten werden stochastisch durch Kanten verbunden. Dieses *ER-Modell* konnte jedoch nicht das Auftreten sog. „Kleiner Welten“ (“Small Worlds”) erklären, wie man sie z. B. beim *Kevin-Bacon-Orakel* kennt: Der „Zusammenarbeitsabstand“ zwischen zwei beliebigen Filmschauspielern ist maximal 8 (vgl.: http://www.ams.org/mathscinet/collaborationDistance.html). Watts und Strogatz stellten daher 1998 ihr *WS-Modell* vor, bei dem die Kanten eines gegebenen regulären Graphen stochastisch nur „neu verdrahtet“ werden. Damit konnte zwar das Entstehen „Kleiner Welten“ erklärt werden, nicht jedoch das Entstehen von sog. *„Naben“* in realen Netzwerken: Sehr wenige Knoten des Netzwerks weisen einen extrem hohen Grad auf (sehr viele Verbindungen zu anderen Knoten). Die Physiker Barabási und Albert stellten daraufhin 1999 alternativ ihr *BA-Modell* vor, gekennzeichnet durch **dynamisches Wachstum** und **bevorzugendes Andocken**:

Reale Netzwerke wachsen nämlich durch Entstehung neuer Kanten **und** neuer Knoten: So „dockt“ bei dem BA-Modell jeder neue Knoten nach dem „Matthäus-Prinzip“ stochastisch an vorhandenen Knoten durch Bildung neuer Kanten an, wobei die bereits „reichen“ Knoten bevorzugt werden (“rich gets richer”). Damit ist dann die *Entstehung von Naben erklärbar*. Insbesondere zeigt sich in Übereinstimmung mit dem BA-Modell und empirischen Untersuchungen (z. B. beim Internet und beim WorldWideWeb): Die zufällige Zerstörung einer geringen Anzahl von Knoten betrifft faktisch keine Naben, und damit ändert sich die charakteristische Weglänge nicht, die hingegen bei gezielter Zerstörung von Naben dramatisch zunimmt.

6. Vernetzung

„Vernetzung“ ist ein Prozess, der ggf. durch solche Modelle beschreibbar ist und der im optimalen Fall einen Netzgraphen liefert, im Normalfall jedoch nur ein Netzwerk, dessen jeweils gewählter „Vernetzungsgrad“ ein Maß für eine mehr oder weniger ausgeprägte Vernetzung bildet. Folgende Sprechweisen bzw. Definitionen liegen nahe:

Verbindung: Zwei *Knoten* eines Graphen sind genau dann *verbunden*, wenn zwischen ihnen ein Weg existiert.
Verzweigung: Ein *zusammenhängender Graph* ist genau dann *verzweigt*, wenn zwischen je zwei verschiedenen Knoten *genau ein Weg* existiert.
Starke Vernetzung: Ein *Graph* ist genau dann *stark vernetzt*, wenn er ein Netzgraph ist.
Schwache Vernetzung: Ein *zusammenhängender Graph* ist genau dann *schwach vernetzt*, wenn er weder verzweigt noch stark vernetzt ist.
Vernetzung: Ein *Graph* ist genau dann *vernetzt*, wenn er entweder schwach vernetzt oder stark vernetzt ist.

Klar: Stark vernetzte Graphen sind stets zusammenhängend. Insbesondere folgt: Sind je zwei Knoten eines endlichen Graphen verbunden (ist der Graph also zusammenhängend), so ist er entweder verzweigt oder vernetzt, d. h.: Es liegt dann **entweder ein Baum oder ein vernetzter Graph** vor.

Ein „**vernetzender Unterricht**“ zeitigt dann Aufgaben für die *Betrachter* (insbes. Lehrpersonen) in Bezug auf die Betreuung der *Benutzer* (insbes. Schülerinnen und Schüler) bei deren Umgehen mit den *Bestandteilen* (wie Ideen, Vermutungen, Definitionen, Sätze, Beispiele, Zusammenhänge, ...).

Literatur

Hischer, H. [2009]: Was sind und was sollen Netze und Vernetzungen? In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2009* (S. 635 – 638).

Hischer, H. [2010]: Was sind und was sollen Medien, Netze und Vernetzungen? — Vernetzung als Medium zur Weltaneignung. Hildesheim: Franzbecker.

(Diese Fassung enthält zwei geringfügige Korrekturen gegenüber der gedruckten Fassung und der CD.)